

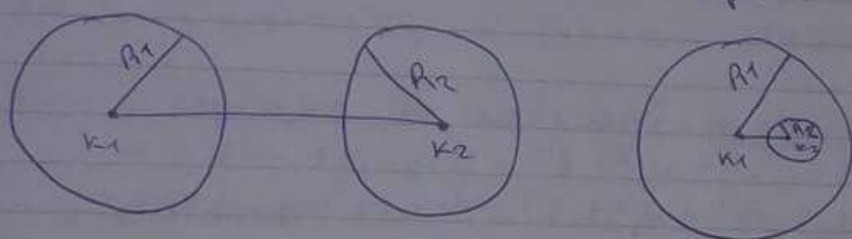
$$7. \{ x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y - 4z \} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y - 4z = 0$$

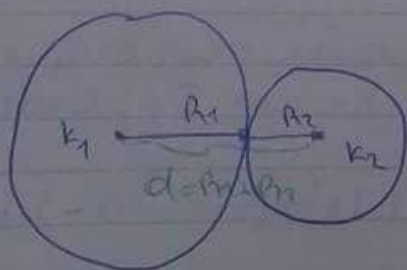
29/3/18

Παράδειγμα: Θεωρούμε δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με κέντρα $k_1(a_1, b_1, c_1)$, $k_2(a_2, b_2, c_2)$ και ακτίνας R_1 και R_2 αντίστοιχα. Θέτουμε $d = \|k_1 k_2\|$, τότε:

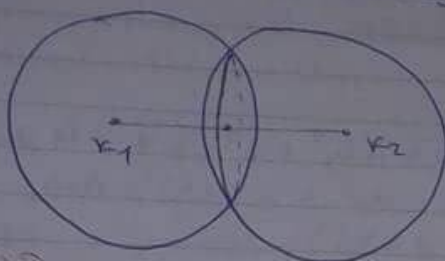
(α) Εάν $d > R_1 + R_2$ ή $d < |R_1 - R_2|$, οι σφαίρες δεν έχουν κοινό σημείο.



(β) Εάν $d = R_1 + R_2$ ή $d = |R_1 - R_2|$, τότε οι σφαίρες έχουν ένα κοινό σημείο στο οποίο τα εφαπτόμενα επίπεδα συμπίπτουν.



(δ) Εάν $|A_1 - A_2| < d < A_1 + A_2$, τότε οι σφαίρες τέμνονται. Η τομή τους είναι κύκλος το μέγεθος του οποίου βρίσκεται στο επίπεδο που ενώνει τα κέντρα των σφαιρών.



όπου $K_1 \left(\frac{-A_1}{2}, \frac{-B_1}{2}, \frac{-C_1}{2} \right)$
και $K_2 \left(\frac{-A_2}{2}, \frac{-B_2}{2}, \frac{-C_2}{2} \right)$

Απόδειξη:

Τα (α), (β) προκύπτουν από τριγωνική ανισότητα.

Οι Σ_1, Σ_2 περιγράφονται από τις εξισώσεις:

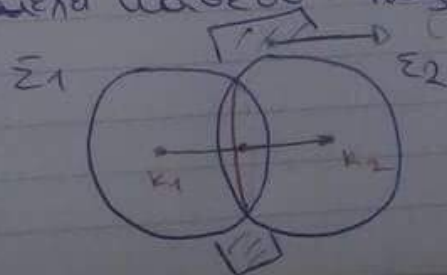
$$\begin{cases} \Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Το τελευταίο σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ (A_2 - A_1)x + (B_2 - B_1)y + (C_2 - C_1)z + D_2 - D_1 = 0 \end{cases}$$

άρα τομή σφαιρών με επίπεδο που είναι κύκλος. Παρατηρούμε επίσης, ότι το επίπεδο

$(A_2 - A_1)x + (B_2 - B_1)y + (C_2 - C_1)z + D_2 - D_1 = 0$
~~είναι~~ κάθετο παράλληλο με το $\vec{K_1K_2}$



Πρόβλημα 7

- ① Νόο η εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z + 9 = 0$ παριστάνει σφαίρα της οποίας να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα
Λύση

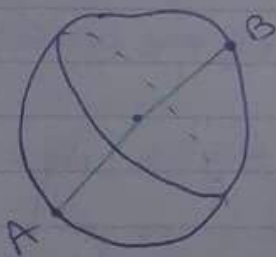
Υποδορίζουμε:

$$0 = x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 6z + 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -9 + 1 + 9 = (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 1$$

Αρα έχουμε σφαίρα με κέντρο $K(1, 0, -3)$ και ακτίνα $R=1$

- ② Δίνονται τα σημεία $A(5, 2, -1), B(-3, 4, 7)$.
Να βρεθεί η σφαίρα που έχει διάμετρο το AB .

Λύση



Αρα η ακτίνα είναι:

$$R = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 2^2 + 8^2}$$

Το κέντρο είναι το μέσο του τμήματος AB . Αρα:

$$K = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{-1+7}{2} \right) = (1, 3, 3)$$

3) Νόο οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ορίσουν κέντρο του οποίου να βρεθεί το μέγεθος και η αυτίνα.

Νόο

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + z^2 - 4z = 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 20 + 9 + 4 =$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 34$$

Αρα κέντρο έχει $K(3, -1, 2)$ και $R=34$

Το κέντρο της σφαίρας είναι το $K(3, -1, 2)$ το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο $z=2$.

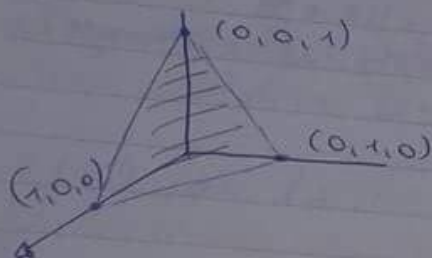
Αρα η τομή είναι κύκλος με αυτίνα 34 διότι το κέντρο της σφαίρας είναι στο $z=2$.



⑤ Δίνονται τα σημεία $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$, $\Delta(1/2, 0, 1/2)$, $E(1,2,3)$. Να εξετασθεί αν ~~από~~ από τις ηρώτες $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ και $\{A, B, \Gamma, E\}$ διέρχεται σφαίρα. Αν ναι να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

Λύση

- Ας υπολογίσουμε το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ .



- Το επίπεδο που περιέχει τα A, B, Γ είναι το $|x+y+z=1|$ (π)

- Επειδή το Δ πληρεί την εξίσωση του π τα σημεία $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ δεν ορίζουν σφαίρα.
- Το E βρίσκεται εντός επιπέδου διότι οι συνιστώσες της δεν πληρούν την εξίσωση του π. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της σφαίρας που διέρχεται από τα A, B, Γ, E .
- Η σφαίρα θα έχει εξίσωση:

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + \gamma z + \delta = 0$$

Ας πει να βρούμε τα a, b, γ, δ

→

Επειδή A, B, Γ, Ε βρίσκονται στην σειρά
έχουμε:

$$\begin{aligned} A: & \begin{cases} 1 + a + \delta = 0 \\ 1 + b + \delta = 0 \\ 1 + \gamma + \delta = 0 \end{cases} \\ E: & 14 + a + 2b + 3\gamma + \delta = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 - \delta \\ b = -1 - \delta \\ \gamma = -1 - \delta \\ \delta = 8/5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 14 + (-1 - \delta) + 2(-1 - \delta) + 3(-1 - \delta) + \delta &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 14 - 1 - \delta - 2 - 2\delta - 3 - 3\delta + \delta &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8 - 5\delta = 0 \Rightarrow \delta = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

$$a = -1 - \frac{8}{5} \Rightarrow a = -\frac{13}{5}$$

$$b = \gamma = -\frac{13}{5}$$

6) Μια σειρά έχει μέτρο το $k(3, 1, 5)$ και
εγκρίνεται του επιπέδου $\pi: 2x - y + 2z + 3 = 0$.
Να βρεθεί η εξίσωση της σειράς.

Λύση

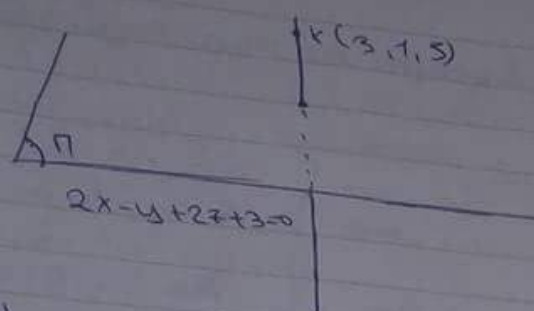
Ας πει να βρούμε την απόσταση
 $d(k, \pi)$ διότι αυτή θα είναι
η αριτή.

$$d(k, \pi) = \frac{|2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 5 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = R$$

$2^{ος}$ τρόπος (Αν δεν θυμάσαι τον τύπο)

Πώς μπορούμε να βρούμε την απόσταση του k από
το π .

Ας βρούμε το σημείο τομής P της ευθείας
που διέρχεται από το k και είναι κάθετη
στο π .



Η ευθεία έχει παραλλήλο διάνυσμα το $\vec{n} = (2, -1, 2)$ αφού είναι κάθετο στο επίπεδο. Άρα έχει εξίσωση:

$$\vec{x} = (3, 1, 5) + t \cdot (2, -1, 2)$$

$$(x, y, z) = (3 + 2t, 1 - t, 5 + 2t)$$

Με αντικατάσταση:

$$0 = 2(3 + 2t) - (1 - t) + 2(5 + 2t) + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 6 + 4t - 1 + t + 10 + 4t + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = 18 + 9t \Rightarrow t = -\frac{18}{9} \Rightarrow \boxed{t = -2}$$

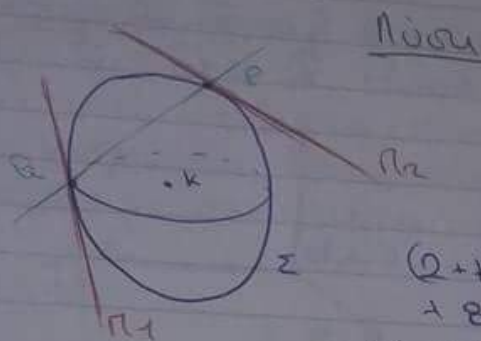
Το σημείο τομής είναι το:

$$P = (3 - 4, 1 + 2, 5 - 4) = (-1, 3, 1)$$

Άρα:

$$R = \|\vec{PK}\| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{48} \Rightarrow$$

- 9) Δίνεται η σφαίρα Σ με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 8z - 21 = 0$ και η ευθεία $\vec{x} = (2, 3, 2) + t(1, 0, -1)$. Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας με την σφαίρα και τα εγγεγρόμενα επίπεδα στα αυτά τα σημεία.



Πύση

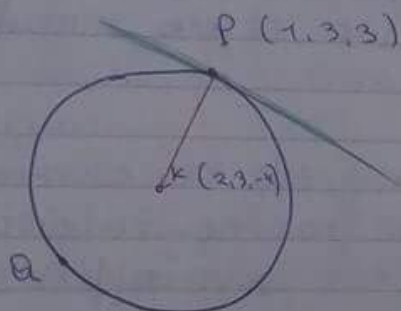
Θα πρέπει να βρούμε για ποια t η (x) συναντάει την σφαίρα υπολογίζουμε

$$(2+t)^2 + 3^2 + (2-t)^2 - 4(2+t) - 6 \cdot 3 + 8(2-t) = 21 \Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow 21 = 2t^2 - 12t + 17 - 6 - 18 + 16$$

$$\Rightarrow 0 \quad \begin{cases} 2t = -1 \\ 6t = 7 \end{cases} \Rightarrow 0$$

σημεία τομής $P(1, 3, 3)$, $Q(9, 3, -5)$



Το επίπεδο είναι κάθετο στο $\vec{KP} = (-1, 0, 1)$ και περνάει από το P .

$$\text{Άρα: } (x-1)(-1) + (y-3) \cdot 0 + (z+1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow -x + 1 + z + 1 = 0$$

Ομοίως βρίσκουμε το εγγεγρόμενο επίπεδο στο Q .